1. ariketa	2. ariketa	3. ariketa	4. ariketa	5. ariketa	GUZTIRA

Iraupena: Ordu 1 eta 45 minutu

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- Aurkitu hurrengo funtzioaren definizio eremua analitiko eta grafikoki:

$$f(x,y)=\frac{\mathrm{L}(\sin x-y)}{\sqrt{x(1-x)}}+\sqrt{y-x^2+1}\,.$$

(1.5 puntu)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \sin x-y>0,\ x(1-x)>0,\ y-x^2+1\geq 0\right\}$$

$\sin x-y>0 \quad\Leftrightarrow\quad y<\sin x$

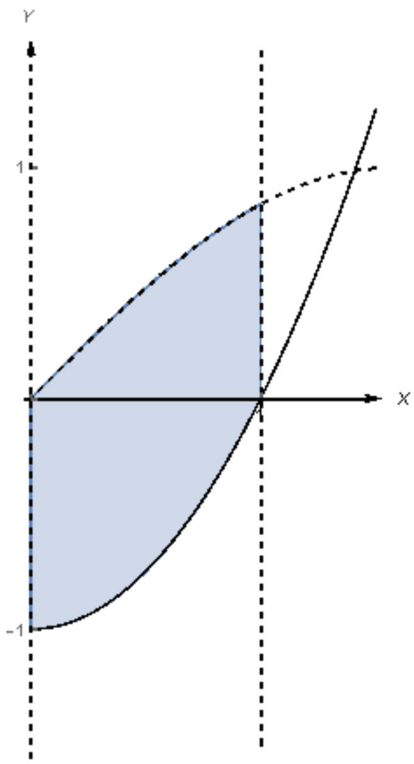
$x(1-x)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \text{ eta } 1-x>0 \\ x<0 \text{ eta } 1-x<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 0<x<1 \\ x<0 \text{ eta } x>1\ \# \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad 0<x<1$

$y-x^2+1\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad y\geq x^2-1$

Hau da:

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0<x<1 \text{ eta } x^2-1\leq y<\sin x\right\}$



2.- $f(x,y)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ **funtzioa emanda:**

a) Funtzioaren jarraitutasuna aztertu jatorrian.

b) Funtzioaren deribatu partzialak jatorrian kalkulatu.

c) Funtzioaren diferentziagarritasuna aztertu jatorrian.

d) Funtzioaren deribatu direkzionala jatorrian kalkulatu, $\vec{u}=(1,1)$ bektorearen norabidean.

(2.5 puntu)

a) *f* jarraitua da (0,0) puntuan $\Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$

$f(0,0)=0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sin\left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\sin\left(\frac{\rho^3\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\rho^2}\right)=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\sin\left(\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right)=0$$

Beraz, *f* jarraitua da (0,0) puntuan.

b) $$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sin\left(\frac{0}{h^2}\right)-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\sin\left(\frac{0}{k^2}\right)-0}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

c) Aurreko bi ataletan diferentziagarria izateko beharrezkoak diren baldintza biak betetzen direla frogatu dugunez, orain BBN erabiliko dugu:

f diferentziagarria da (0,0) puntuan

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\cdot f'_x(0,0)-k\cdot f'_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Hau da:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\sin\left(\frac{hk^2}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}\overset{(*)}{=}\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\sin\left(\frac{\rho^3\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\rho^2}\right)}{\rho}=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\sin\left(\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta\right)}{\rho}=$$

$$=\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\frac{\rho\cdot\cos\theta\cdot\sin^2\theta}{\rho}=\underbrace{\lim_{\substack{\rho\to0^+\\ \forall\theta}}\cos\theta\cdot\sin^2\theta}_{\nexists\ (\theta\text{–ren mende geratzen baita})}$$

Beraz, *f* ez da diferentziagarria (0,0) puntuan.

d) f diferentziagarria ez denez (0,0) puntuan, deribatu direkzionala definizioz kalkulatu behar dugu:

$\vec{u} = \left(h_1, h_2\right)$ bektore unitarioa emanik, $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f\left(\lambda h_1, \lambda h_2\right) - f(0,0)}{\lambda}$

Kasu honetan, lehenengo eta behin, $\vec{u} = (1,1)$ unitario bihurtu behar dugu: $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Eta,

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sin\left(\dfrac{\lambda^3 \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\lambda^2}\right)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\sin\left(\lambda \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\lambda} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(*) Bi limite horiek koordenatu polarretan adierazi ditut:

$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$ lehenengo kasuan, eta, $\begin{cases} h = \rho \cdot \cos\theta \\ k = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}$ bigarrenean.

3.- $\begin{cases} F(x,y,z,t)=e^{x-y}+xz+yt-5=0 \\ G(x,y,z,t)=e^{x-z-t}+y-2z-t=0 \end{cases}$ **ekuazio-sistema emanda:**

a) Frogatu $z=z(x,y)$ **eta** $t=t(x,y)$ **funtzioak definitzen dituela** $P(x,y,z,t)=(2,2,1,1)$ **puntuaren ingurunean.**

b) Aurkitu, (2,2) puntuan, norabideak non $z=z(x,y)$ **funtzioaren aldakuntza maximoa eta minimoa diren, hurrenez hurren.**

(3 puntu)

a) $\begin{cases} F(x,y,z,t)=e^{x-y}+xz+yt-5=0 \\ G(x,y,z,t)=e^{x-z-t}+y-2z-t=0 \end{cases}$ ekuazio-sistemari funtzio inplizituaren teorema aplikatuko diogu $P(x,y,z,t)=(2,2,1,1)$ puntuan:

i. $\begin{cases} F(P)=e^{0}+2+2-5=0 \\ G(P)=e^{0}+2-2-1=0 \end{cases}$

ii. $\begin{cases} F'_x=e^{x-y}+z & F'_y=-e^{x-y}+t & F'_z=x & F'_t=y \\ G'_x=e^{x-z-t} & G'_y=1 & G'_z=-e^{x-z-t}-2 & G'_t=-e^{x-z-t}-1 \end{cases}$ jarraituak dira P-ren ingurune batean.

iii. $\left|\dfrac{D(F,G)}{D(z,t)}\right|_P=\begin{vmatrix} F'_z & F'_t \\ G'_z & G'_t \end{vmatrix}_P=\begin{vmatrix} x & y \\ -e^{x-z-t}-2 & -e^{x-z-t}-1 \end{vmatrix}_P=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}=2\neq 0$

Orduan, $P(x,y,z,t)=(2,2,1,1)$ puntuaren ingurunean, $\exists!\begin{cases} z=z(x,y) \\ t=t(x,y) \end{cases}$ diferentziagarriak, non $\begin{cases} z(2,2)=1 \\ t(2,2)=1 \end{cases}$, eta, $\begin{cases} F(x,y,z(x,y),t(x,y))=0 \\ G(x,y,z(x,y),t(x,y))=0 \end{cases}$.

b) $z=z(x,y)$ funtzioa diferentziagarria denez, bere aldakuntza maximoa $\overrightarrow{\nabla} z(2,2)=\left(z'_x(2,2),z'_y(2,2)\right)$ bektorearen norabidean ematen da. Eta minimoa, berriz, gradientearekiko perpendikularra den norabidean, $\left(-z'_y(2,2),z'_x(2,2)\right)$, hain zuzen ere.

$z=z(x,y)$ funtzioaren deribatu partzialak lortzeko, $\begin{cases} F(x,y,z(x,y),t(x,y))=0 \\ G(x,y,z(x,y),t(x,y))=0 \end{cases}$ sisteman x-rekiko eta y-rekiko deribatuko dugu.

$$\begin{cases} e^{x-y}+z+x\cdot z'_x+y\cdot t'_x=0 \\ \left(1-z'_x-t'_x\right)e^{x-z-t}-2z'_x-t'_x=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan ordezkatuz}}{\Rightarrow} \begin{cases} 2+2z'_x(2,2)+2t'_x(2,2)=0 \\ 1-3z'_x(2,2)-2t'_x(2,2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_x(2,2)=3 \\ t'_x(2,2)=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -e^{x-y}+x\cdot z'_y+t+y\cdot t'_y=0 \\ \left(-z'_y-t'_y\right)e^{x-z-t}+1-2z'_y-t'_y=0 \end{cases} \overset{P \text{ puntuan ordezkatuz}}{\Rightarrow} \begin{cases} 2z'_y(2,2)+2t'_y(2,2)=0 \\ -3z'_y(2,2)-2t'_y(2,2)+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_y(2,2)=1 \\ t'_y(2,2)=-1 \end{cases}$$

Beraz, norabidea non $z=z(x,y)$ funtzioaren aldakuntza maximoa ematen den, (3,1) bektoreak adierazten du. Eta, norabidea non $z=z(x,y)$ funtzioaren aldakuntza minimoa izaten den, (-1,3) bektorearena da.

4.- $f(x,y)=x^2+y$ **funtzioaren mutur erlatiboak kalkulatu,** $x^2-y^2=1$ **ekuazioak ematen duen baldintzarekin.**

(2 puntu)

$x^2-y^2=1$ ekuazioak baldintzaturiko $f(x,y)=x^2+y$ funtzioaren mutur erlatiboak kalkulatzeko Lagrangeren biderkatzaileen metodoa erabiliko dugu. Beraz, kalkula ditzagun hurrengo funtzioaren mutur erlatiboak:

$$w(x,y)=x^2+y+\lambda\left(x^2-y^2-1\right)$$

Puntu kritikoak hurrengo sistemaren soluzioak izango dira:

$$\begin{cases} w'_x=2x+2\lambda x=0 \Leftrightarrow 2x(1+\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \overset{\text{3. ekuazioan}}{\Rightarrow} y^2=-1\# \\ \lambda=-1 \overset{\text{2. ekuazioan}}{\Rightarrow} y=-\dfrac{1}{2} \overset{\text{3. ekuazioan}}{\Rightarrow} x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ w'_y=1-2\lambda y=0 \\ x^2-y^2=1 \end{cases}$$

Beraz, bi puntu kritiko lortu ditugu:

$A=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$ eta $B=\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$, $\lambda=-1$ bietarako.

Orain, puntu kritikoak sailkatu behar ditugu, d^2w-ren zeinua aztertuz.

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} w''_{x^2}=2(1+\lambda) \\ w''_{xy}=0 \\ w''_{y^2}=-2\lambda \end{array}\right\} \overset{A \text{ eta } B \text{ puntuetan}}{\Rightarrow} \begin{cases} w''_{x^2}(A)=w''_{x^2}(B)=0 \\ w''_{xy}(A)=w''_{xy}(B)=0 \\ w''_{y^2}(A)=w''_{y^2}(B)=2 \end{cases} \Rightarrow d^2w(A)=d^2w(B)=2(dy)^2 \\ 2xdx-2ydy=0 \Rightarrow \begin{cases} A \text{ puntuan: } \sqrt{5}dx-dy=0 \\ B \text{ puntuan: } -\sqrt{5}dx-dy=0 \end{cases} \end{cases}$$

Orduan, $\forall(dx,dy)\neq(0,0)$ $d^2w(A)=d^2w(B)>0 \Rightarrow$ A eta B minimo erlatibo baldintzatuak dira.

<u>Oharra</u>:

Argi dago $d^2w(A)=d^2w(B)=2(dy)^2$ ezin dela negatiboa izan. Eta, $d^2w(A)=d^2w(B)=2(dy)^2=0 \Leftrightarrow dy=0$. Baina, $\begin{cases} A \text{ puntuan: } \sqrt{5}dx-dy=0 \\ B \text{ puntuan: } -\sqrt{5}dx-dy=0 \end{cases}$ erlazioa egiaztatu behar denez, orduan $dx=0$ ere izango zen, eta, hau ezinezkoa da.

5.- $D \subset \mathbb{R}^2$ **eremuan definituriko** $z = f(x,y)$ **funtzioa eta** $P \in D$ **puntua emanik, hurrengo suposizioetarako adierazi ea baieztapenak egiazkoak (E) ala gezurrezkoak (G) diren.**

(Puntu 1)

1. suposizioa: *P* puntuan *f* deribagarria bada, orduan

f diferentziagarria da *P* puntuan	G
f jarraitua da *P* puntuan	G
$\exists f'_x(P)$ eta $\exists f'_y(P)$	E

2. suposizioa: *P* puntuan *f* diferentziagarria bada, orduan

f deribagarria da *P* puntuan	E
f jarraitua da *P* puntuan	E
$\exists f'_x(P)$ eta $\exists f'_y(P)$	E

3. suposizioa: *P* puntuan *f* jarraitua ez bada, orduan

f ez da deribagarria P puntuan.	G
f ez da diferentziagarria *P* puntuan.	E
$\nexists f'_x(P)$ eta $\nexists f'_y(P)$.	G

4. suposizioa: $\exists f'_x(P)$ eta $\exists f'_y(P)$, orduan

f deribagarria da *P* puntuan	G
f jarraitua da *P* puntuan	G
f diferentziagarria da *P* puntuan	G